Ascoltare Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier

1768 Auxerre – 1830 Parigi

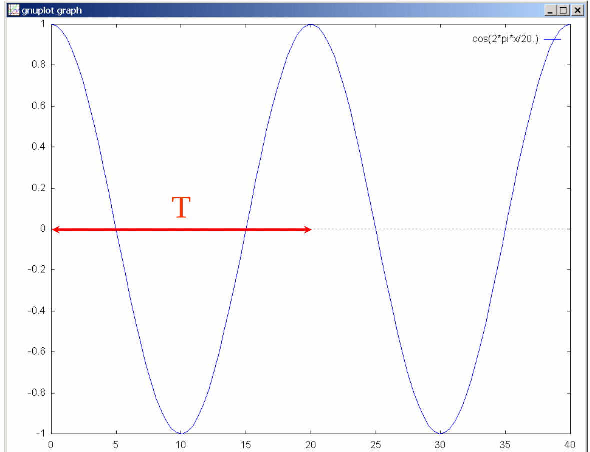
Matematico francese, partecipò alla rivoluzione francese e seguì Napoleone in Egitto come membro della spedizione scientifica.

Studiò principalmente la diffusione del calore nei corpi.

Conobbe Laplace, Lagrange, Legendre e Poisson.

Segnali audio

I segnali audio descrivono le variazioni di pressione che il nostro orecchio percepisce come suoni. Focalizziamo la nostra attenzione su segnali “periodici” che chiamiamo toni.



$x(t+T)=x(t)$

T=periodo

Un tono puro può essere descritto dalla seguente funzione sinusoidale del tempo:

$$x(t) = a \cos(\omega_o t + \theta)$$

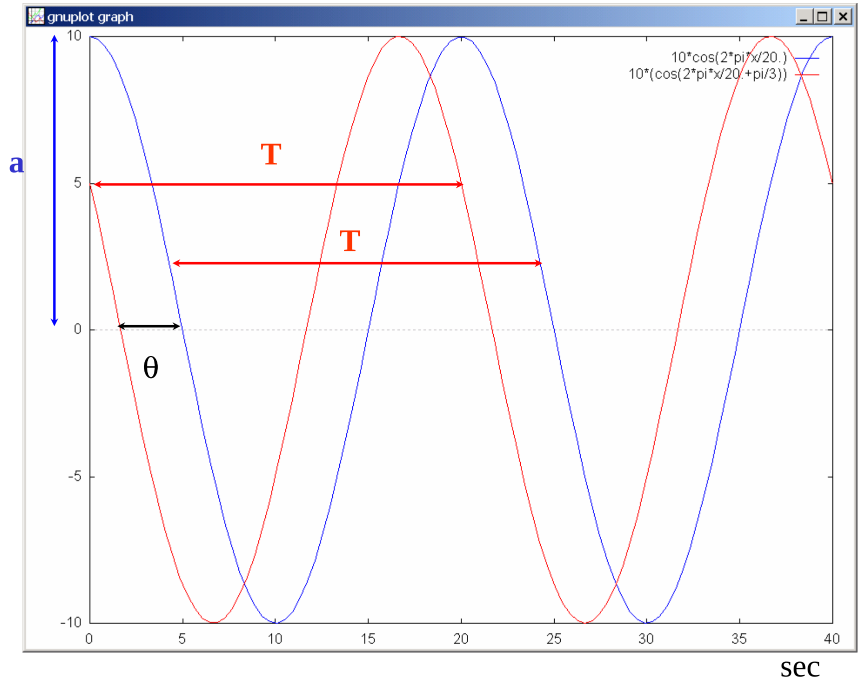
dove $a > 0$ è *l’ampiezza,*

$\omega_o > 0$ è la pulsazione espressa in *radianti/secondi*

($\nu=\omega_o/2\pi$ è la frequenza in *Hertz*)

θ è l’angolo di fase

Questo segnale ha periodo: $T=2\pi/\omega_o$

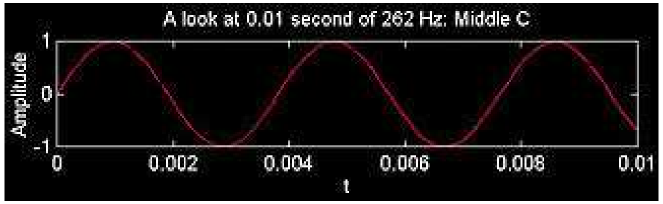


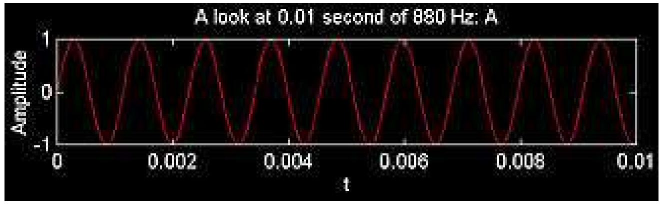
Caratteri distintivi del suono

Intensità = intuitivamente è legata al volume del suono ovvero all’ampiezza *a* della sinusoide

Altezza = è quella caratteristica del suono che ci consente di distiguere un tono basso (grave) da un tono alto (acuto). Suoni più acuti hanno frequenza fondamentale più alta.

Timbro = Se un pianoforte e un violino emettono la stessa nota con la stessa intensità i suoni corrispondenti sono evidentemente diversi. I due strumenti hanno emesso un segnale che ha la stessa frequenza ed intensità ma differente timbro. Il timbro è legato alla forma d’onda. Gli strumenti musicali non emettono toni puri (ovvero sinusoidi perfette, che sarebbero anche sgradevoli) ma sono caratterizzati da forma d’onda molto differenti tra loro.





Note e ottave

Si definisce ottava l’intervallo musicale tra due ‘do’ consecutivi.

Dalla metà del settecento tutti gli strumenti ad intonazione fissa (pianoforte, organo,..) sono accordati secondo la scala temperata.

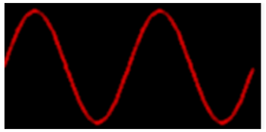
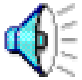
Questa scala divide l’ottava in 12 intervalli ognuno dei quali vale un semitono.

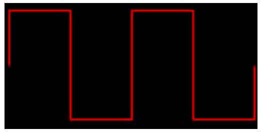
Ogni semitono corrisponde alla frequenza del semitono precedente moltiplicata per $2^{1/12}$, in modo tale che la prima nota dell’ottava seguente abbia frequenza doppia della nota corrispondente nell’ottava precedente.

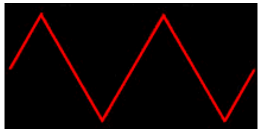
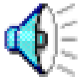
Nella tabella seguente diamo un esempio di note che formano una ottava a partire da un “la” prodotto dal diaphason.

Note	Notazione Anglossassone	Frequenza (Hz)
la	A	**440.0 = 440 x $2^{0/12}$**
la#	A#	**466.2 = 440 x $2^{1/12}$**
si	B	**493.8 = 440 x $2^{2/12}$**
do	C	**523.2= 440 x $2^{3/12}$**
do#	C#	**554.4 = 440 x $2^{4/12}$**
re	D	**587.3 = 440 x $2^{5/12}$**
re#	D#	**622.2 = 440 x $2^{6/12}$**
mi	E	**659.2 = 440 x $2^{7/12}$**
fa	F	**698.4 = 440 x $2^{8/12}$**
fa#	F#	**740.0 = 440 x $2^{9/12}$**
sol	G	**784.0 = 440 x $2^{10/12}$**
sol#	G#	**830.6 = 440 x $2^{11/12}$**
la	A	**880.0 = 440 x $2^{12/12}$**

Toni non puri



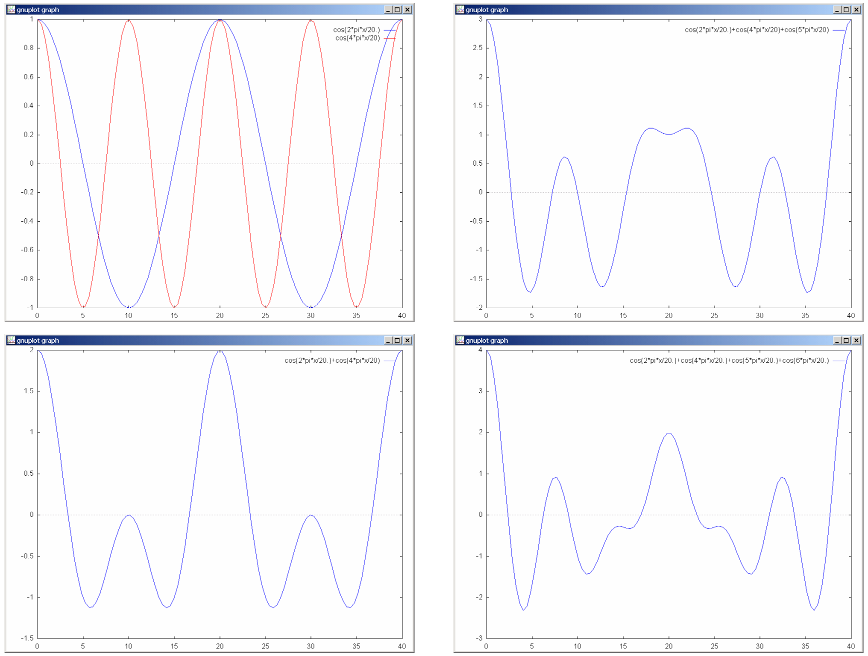
Armoniche

La forma d’onda di un tono non puro dipende dalle “armoniche”.

Le armoniche di un suono puro (ovvero di una segnale sinusoidale ad una certa frequenza che chiameremo fondamentale) sono i suoni (segnali) di frequenza multipla di quella fondamentale.

Se si sommano due o più armoniche si compone un segnale che ha la stessa frequenza di quella fondamentale, ma forma diversa:

Nel lucido seguente presentiamo un esempio.



Consideriamo ora un “do” e verifichiamo a cosa corrispondono le sue armoniche principali.

do	re	mi	fa	sol	la	si
261.6	294	329.6	349	392.0	440	494
523.2		659.2		784		
1046.4		1318.4		1568		

- seconda armonica 261.6*2 = 523.2 do dell’ottava successiva
- terza armonica 261.6*3 = 784.8 sol dell’ottava successiva
- quarta armonica 261.6*4 = 1046.4 do di due ottave sopra
- quinta armonica 261.6*5 = 1318 mi di due ottave sopra

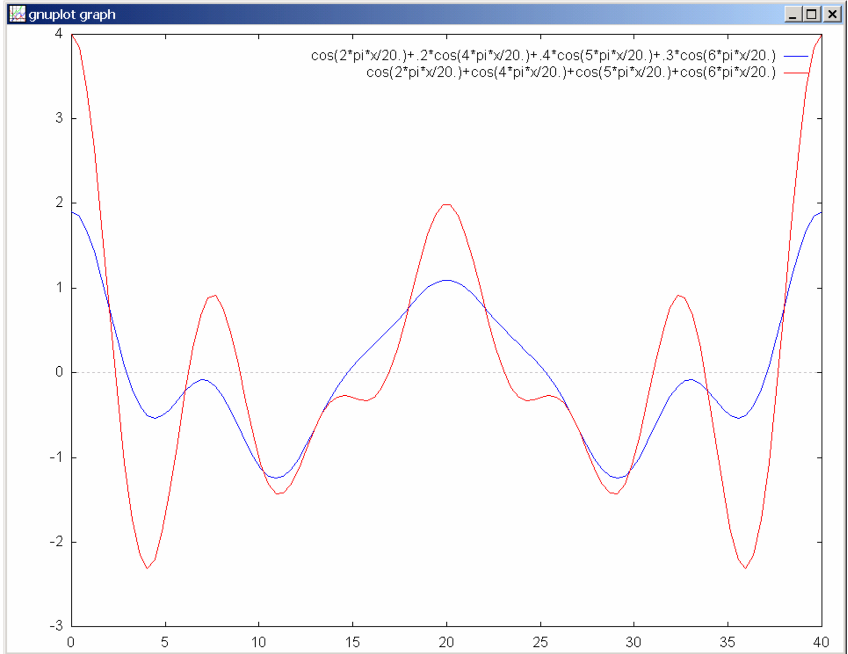
Queste tre note “suonano bene assieme” e formano l’accordo di do-maggiore.

Analisi di Fourier

Le varie armoniche possono essere sommate con coefficienti (intensità) differenti e il segnale risultante a parità di armoniche dipende da questi coefficienti.

Fourier, dimostrò che qualsiasi segnale periodico può essere scomposto in una somma di (infiniti) segnali sinusoidali di cui il primo termine ha lo stesso periodo del segnale considerato e gli altri termini sono tutte armoniche pesate con opportuni coefficienti. Inoltre questa decomposizione è unica.

Il significato dell'analisi di un segnale attraverso la "trasformata di Fourier" è lo studio delle "armoniche" del segnale, ovvero lo studio delle ampiezze delle varie armoniche che permettono di formare il segnale.



Conviene rappresentare il segnale (sonoro) attraverso l'esponenziale complesso:

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t + \theta) = \frac{a}{2}\left(e^{i(\omega_0 t + \theta)} + e^{-i(\omega_0 t + \theta)}\right)$$

$$x(t) = \frac{ae^{i\theta}}{2}e^{i\omega_0 t} + \frac{ae^{-i\theta}}{2}e^{-i\omega_0 t}$$

$$x(t) = ce^{i\omega_0 t} + c^* e^{-i\omega_0 t} \qquad c = \frac{ae^{i\theta}}{2}$$

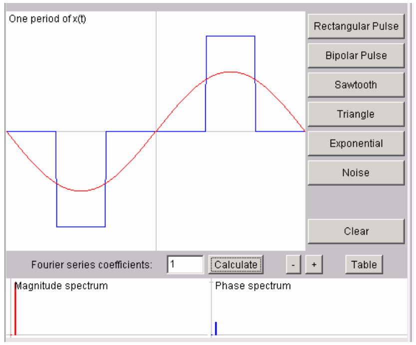
La serie di Fourier

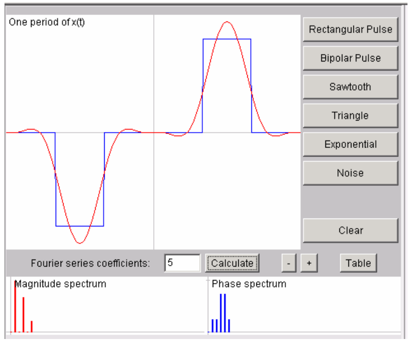
Fourier dimostrò che un segnale periodico, con periodo T, può essere scomposto in una somma (infinita) di segnali periodici e ne calcolò i coefficienti.

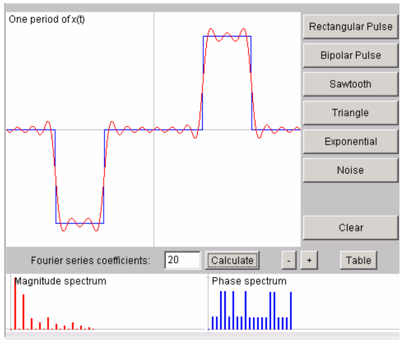
$$x(t) = ce^{i\frac{2\pi}{T}t} + c^* e^{-i\frac{2\pi}{T}t}$$

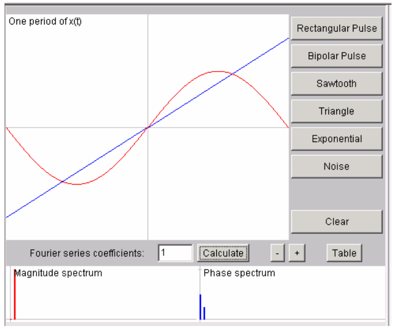
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt} \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}dt$$

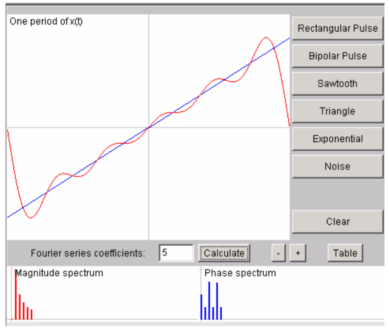
ovviamente i coefficienti c_n sono, in genere, numeri complessi http://www.jhu.edu/~signals

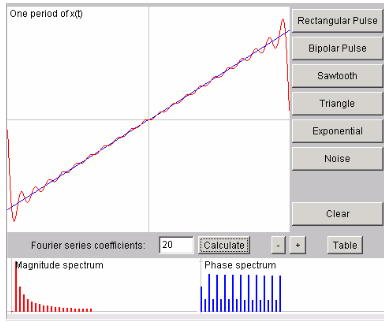










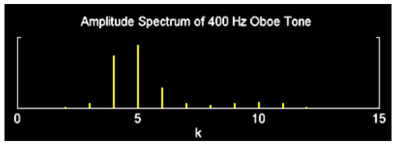


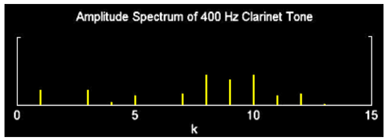
Timbri e spettri

Abbiamo detto che uno strumento musicale non emette un tono puro, ma il suo suono è caratterizzato dal timbro, ovvero la forma del segnale sonoro emesso.

Il timbro dipende dalla presenza delle armoniche di un segnale; le armoniche analizzate in Fourier compongono lo spettro del segnale.

Infatti i coefficienti possono essere rappresentati in un grafico in funzione della frequenza dell’armonica, questo grafico è detto ‘spettro’ del segnale.



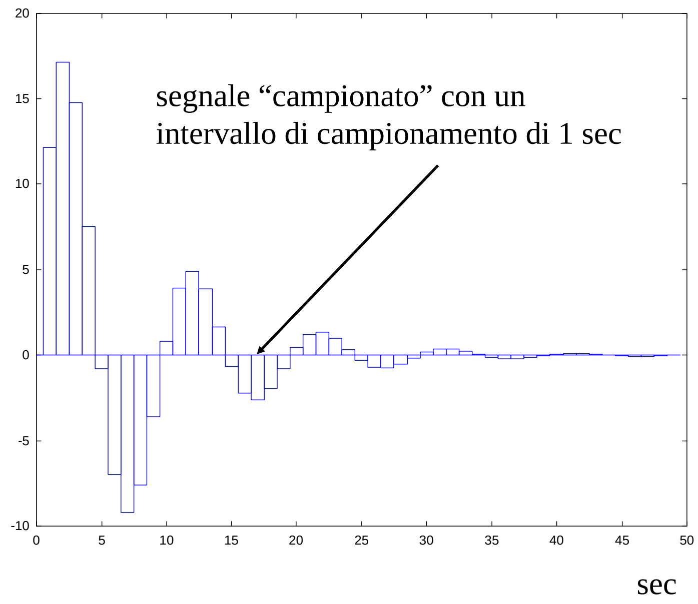


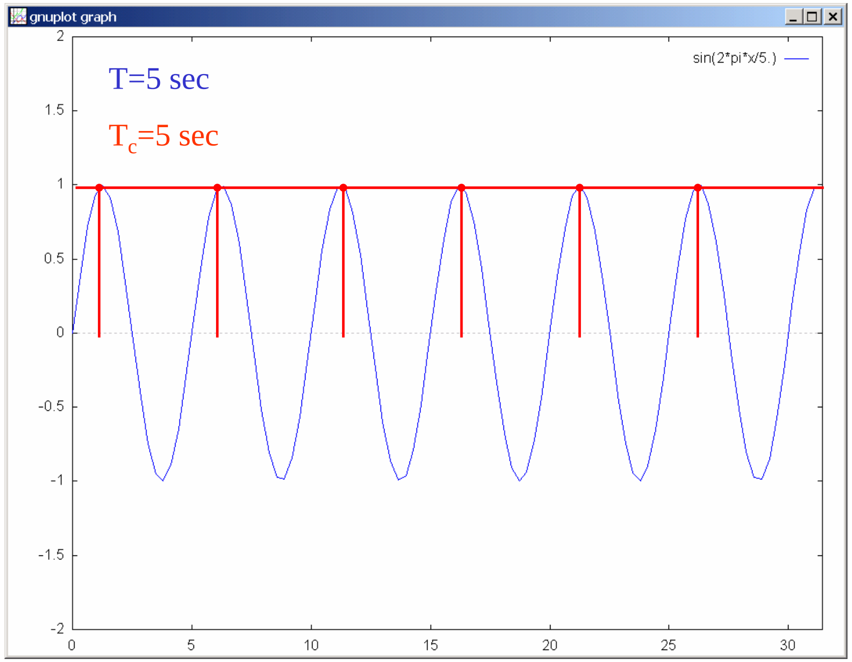
Campionamento

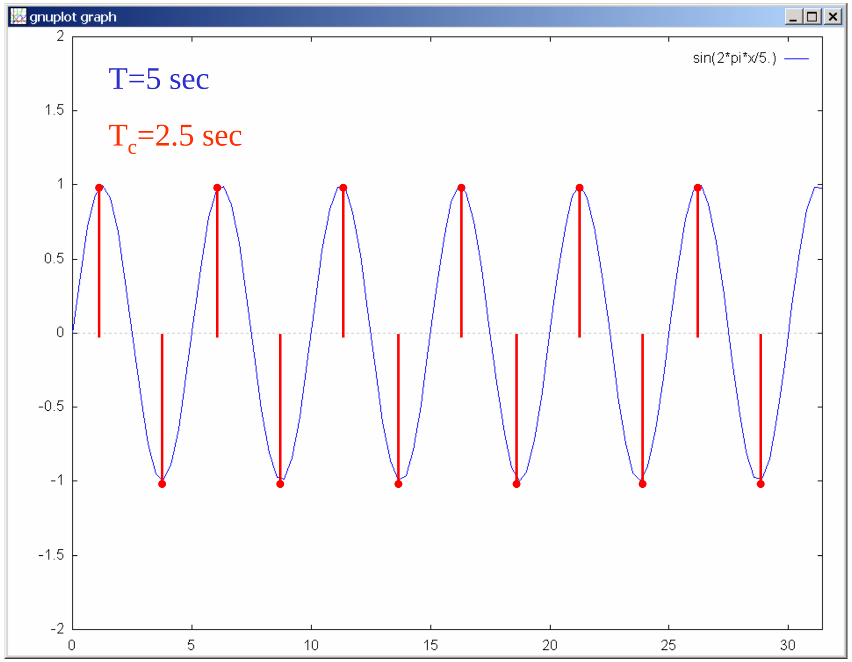
Ora che abbiamo, intuitivamente introdotto l’analisi di Fourier, possiamo riprendere un aspetto dell’acquisizione che avevamo tralasciato: il campionamento.

Il campionamento è intrinseco nella conversione da analogico a digitale e le considerazioni che si faranno ora valgono sia per i segnali unidimensionali (per esempio dipendenti dal tempo) sia per i segnali bidimensionali, ovvero le immagini.

“Campionare” significa “misurare” un segnale ad intervalli regolari e considerare questa misura costante su tutto l’intervallo di tempo tra una misura e l’altra.







Teorema del campionamento o teorema di Shannon

Sia ω_{max} la pulsazione (frequenza) massima delle armoniche che compongono il segnale il teorema del campionamento dice che: per non avere perdita di informazione occorre campionare con un frequenza ω_c tale che

$$\omega_c \geq 2\omega_{\max}$$

Il teorema può essere interpretato in un altro modo:

Un segnale campionato con pulsazione (frequenza) ω_c contiene armoniche con pulsazioni (frequenze) minori o uguali a $\omega_c/2$.

Ovvero un segnale campionato (ovvero digitale) è un segnale a banda limitata e la sua banda è :

$$\Omega = \omega_c / 2 = \frac{\pi}{\Delta t}$$

Facciamo un esempio numerico:

Lo spettro di udibilità del orecchio umano è stato stimato nell'intervallo 20 Hz – 20 KHz.

$$\nu = 20\text{KHz}$$

per non perdere informazione su questa componente in frequenza il segnale dovrà essere campionata con

$$\nu_c = 40\text{KHz}$$

che corrisponde ad un intervallo di campionamento

$$\Delta t = 2.5\ 10^{-5}\text{s} = 0.25\ \text{ms}$$