5.3 Semi-anelli chiusi e chiusura transitiva

Descriveremo un algoritmo per calcolare la *chiusura transitiva* di una matrice a valori in un *semi-anello chiuso*. L'algoritmo e' una generalizzazione (e lieve variazione) dell'algoritmo di Floyd per calcolare le distanze tra tutte le coppie di nodi. Variando opportunamente il semi-anello si possono risolvere (con lo stesso algoritmo astratto) una varieta' di problemi su grafi e matrici.

5.4 Semi-anelli chiusi

Introduciamo le nozioni matematiche preliminari per descrivere il problema e giustificare la correttezza dell'algoritmo.
Un **semi-anello** $(A, +, *, 0, 1)$ e' una struttura algebrica con due operazioni binarie $+$ e $*$ e due costanti 0 ed 1 che soddisfano i seguenti assiomi

- associativita' del $+$: $(x + y) + z = x + (y + z) \quad 0 + x = x = x + 0$
- commutativita' del $+$: $x + y = y + x$
- associativita' del $*$: $(x * y) * z = x * (y * z) \quad 1 * x = x = x * 1$
- distributivita': $(x + y) * z = (x * z) + (y * z) \quad z * (x + y) = (z * x) + (z * y) \quad 0 * z = 0 = z * 0$

Un **semi-anello chiuso** e' un semi-anello dove si possono effettuare sommatorie arbitrarie $\sum_{i \in I} a_i$, dove I e' un insieme qualsiasi (usando 0 e + si possono calcolare solo sommatorie su insiemi finiti), e dove gli assiomi dei semi-anelli che riguardano 0 e + devono essere estesi al caso di sommatorie arbitrarie:

- associativita' di $\sum$: $\sum_{i \in I} (\sum_{j \in J_i} x_{i,j}) = \sum_{i \in I, j \in J_i} x_{i,j}$ dove J_i e' un insieme per ogni $i \in I$
- commutativita' di $\sum$: $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_{f(j)}$ dove $f : J \to I$ e' una funzione bigettiva
- associativita' del $*$ (come per i semi-anelli): $(x * y) * z = x * (y * z) \quad 1 * x = x = x * 1$
- distributivita': $(\sum_{i \in I} x_i) * z = \sum_{i \in I} (x_i * z) \quad z * (\sum_{i \in I} x_i) = \sum_{i \in I} (z * x_i)$

In un semi-anello chiuso e' possibile definire due operazioni unarie

- **chiusura transitiva** $a^+ = \sum_{n > 0} a^n$
- la **chiusura riflessiva e transitiva** $a^* = 1 + a^+ = \sum_{n \geq 0} a^n$

dove a^n e' il prodotto di $a \in A$ con se' stesso n volte, cioe' $a^0 = 1$ e $a^{n+1} = a * a^n$. Vi sono innumerevoli esempi di semi-anelli (chiusi), per esempio:

1. $(\mathsf{N}, +, *, 0, 1)$, cioe' i numeri naturali N con le usuali operazioni aritmetiche, questo semi-anello NON E' CHIUSO
2. $(\overline{\mathsf{N}}, +, *, 0, 1)$, cioe' i numeri naturali estesi con $+\infty$ e con le usuli operazioni opportunamente estese:
   $x + (+\infty) = +\infty$, $0 * (+\infty) = 0$, $n * (+\infty) = +\infty$ se $n > 0$
3. $(\overline{\mathsf{N}}, \min, +, +\infty, 0)$, cioe' i numeri naturali estesi con $+\infty$ con le operazioni di minimo e somma
   (esercizio: verificare la proprieta' distributiva)
4. $(\overline{\mathsf{N}}, \max, \min, 0, +\infty)$, cioe' i numeri naturali estesi con $+\infty$ con le operazioni di massimo e minimo
   (esercizio: verificare la proprieta' distributiva)
5. vi sono le ovvie varianti ottenute sostituendo a N i reali/razionali non negativi $\mathsf{R}_0/\mathsf{Q}_0$
6. $(\mathsf{B}, \vee, \wedge, \perp, \top)$, cioe' i valori booleani con le operazioni logiche or $\vee$ e and $\wedge$ e le costanti falso $\perp$ e vero $\top$
7. $(\overline{\mathsf{R}}, \min, +, +\infty, 0)$, cioe' i reali estesi con $+\infty$ e $-\infty$, dove $x + (+\infty) = +\infty$ anche quando $x = -\infty$
8. $(\overline{\mathsf{R}}, \max, +, -\infty, 0)$, cioe' i reali estesi con $+\infty$ e $-\infty$, dove $x + (-\infty) = -\infty$ anche quando $x = +\infty$
   Si noti che $(\mathsf{N}, \max, +, 0, 0)$, NON e' un semi-anello.

In alcuni di questi semi-anelli le operazioni soddisfano proprieta' aggiuntive, p.e.: tutte le interpretazioni del $*$ soddisfano la proprieta' commutativa $x * y = y * x$; quando $+$ e' interpretato da min o max, allora vale l'idempotenza $x+x = x$. Per esercizio si provi a definire esplicitamente le operazioni di chiusura. Vi sono costruzioni che permettono di definire nuovi semi-anelli (chiusi) a partire da semi-anelli (chiusi) piu' semplici, per esempio

- Se A_1 e A_2 sono semi-anelli, allora $A_1 \times A_2$ e' il semi-anello con le operazioni definite componente per componente, p.e. $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$.

  In modo analogo si puo' definire il prodotto $\prod_{i \in I} A_i$ di una famiglia di semi-anelli.

- Se A e' un semi-anello, allora l'insieme delle matrici $V \times V$ (con V insieme finito) a coefficienti in A e' un semi-anello con le operazioni sulle matrici definite nel modo usuale, cioe' $(M + N)[u, v] = M[u, v] + N[u, v]$ e $(M * N)[u, v] = \sum_{w \in V} (M[u, w] * N[w, v])$.

  Se A e' un semi-anello chiuso, allora l'insieme V puo' essere anche essere infinito.

Se i semi-anelli di partenza sono chiusi, e' facile vedere che, anche i semi-anelli definiti da tali costruzioni sono chiusi.

5.5 Operazioni su matrici e cammini

Vi e' una corrispondenza biunivoca tra matrici M di dimensione $V \times V$ a coefficienti in un semi-anello A e grafi G con insieme dei nodi V ed archi con pesi in $A - \{0\}$ data da: (x, y) e' un arco di G con etichetta $a \neq 0$ sse $M[x, y] = a$. Quando A e' il semi-anello B dei booleani (e quindi 0 e' interpretato dal falso $\perp$), allora M non e' altro che la matrice di adiacenza di G.

Data una matrice M a coefficienti in A (e G il grafo corrispondente), possiamo definire i seguenti valori derivati:

- $M[p]$. Sia $p{:}\, x \rightsquigarrow y$ un cammino di G, definiamo il suo peso $M[p]$ come il prodotto in A dei pesi che si incontrano lungo il cammino, cioe' $M[x_0, ..., x_n] = M[x_0, x_1] * ... * M[x_{n-1}, x_n]$ (e si pone $M[x] = 1$). Si osservi che $M[p] = 0$, se la sequenza di nodi non e' un cammino in G, poiche' $M[x_{i-1}, x_i] = 0$ per qualche i.

  $M^n[x, y]$ risulta uguale alla sommatoria in A di $M[p]$ con p che varia sui cammini da x a y in G con esattamente n archi. Poiche' $M[p] = 0$ se p e' una sequenza di nodi che non corrisponde ad un cammino, tali addendi non contribuiscono alla sommatoria.

  $M^+[x, y]$ (cioe' la chiusura transitiva di M) risulta uguale alla sommatoria in A di $M[p]$ con p che varia sui cammini propri (cioe' con almeno un arco) da x a y.

- $M^+_U[x, y]$ e' la sommatoria di $M[p]$ con p che varia sui cammini propri da x a y con nodi intermedi in U.

  Dato $v \in V - U$ si dimostra che $M^+_{U+v}[x, y] = M^+_U[x, y] + (M^+_U[x, v] * (M^+_U[v, v])^* * M^+_U[v, y])$

  Quindi formalmente abbiamo la stessa equazione alla base dell'algoritmo di Floyd per il calcolo delle distanze.

Si puo' definire anche $M^*_U[x, y]$, pero' in generale non soddisfa la stessa definizione ricorsiva di M^+, a meno che la sommatoria in A non soddisfi anche la proprieta' di idempotenza (cioe' la versione infinitaria di $x + x = x$).

5.6 Algoritmo di Floyd per calcolare la chiusura transitiva

Sia A un semi-anello chiuso, su cui non faremo alcune ipotesi tranne il fatto di essere in grado di calcolare $x + y$, $x * y$, 0, 1 e x^*. Diamo l'algoritmo (stile Floyd) per calcolare la chiusura transitiva M^+ di una matrice $V \times V$ a valori in A e con V finito. Le operazioni $x + y$, $x * y$ e x^* sono quelle del semi-anello chiuso A.

```
input:  M: array [V,V] of A
output: M^+: array [V,V] of A
var: M': array [1..|V|] of array [V,V] of A
*inizializzazione
M'[0] <- M
for k <- 1 to |V| do
for x,y in V do
M'[k,x,y] <-  M'[k-1,x,y]+(M'[k-1,x,v_k]*(M'[k-1,v_k,v_k]^*)*M'[k-1,v_k,y])
M^+ <- M'[|V|]
```

Tale algoritmo e' interessante perche' instanziando A con opportuni semi-anelli chiusi le matrici M^+ e $M^*(= I + M^+)$ forniscono la soluzione a svariati problemi relativi a grafi pesati. Per esempio:

- $M^*[x, y]$ e' il numero di cammini da x a y, se $A = (\overline{\mathsf{N}}, +, *, 0, 1)$ e $M[x, y] = 1$ se (x, y) e' un arco, 0 altrimenti.
- $M^*[x, y]$ e' la distanza da x a y (la lunghezza del cammino di lunghezza minima), se $A = (\overline{\mathsf{R}}, \min, +, +\infty, 0)$ e $M[x, y]$ e' la lunghezza dell'arco (x, y).
- $M^*[x, y]$ e' la lunghezza del cammino di lunghezza massima, se $A = (\overline{\mathsf{R}}, \max, +, -\infty, 0)$ e $M[x, y]$ e' la lunghezza dell'arco (x, y).
- $M^*[x, y]$ sse esiste un cammino da x a y, se $A = (Bool, or, and, false, true)$ e M e' la matrice di adiacenza.
- $M^*[x, y]$ e' la capacita' del cammino da x a y con capacita' massima, se $A = (\overline{\mathsf{N}}, \max, \min, 0, +\infty)$ e $M[x, y]$ e' la capacita' dell'arco (x, y).

Esercizio: trovare un semi-anello chiuso A in modo che da $M^*[x, y]$ sia ricavi il numero di cammini di lunghezza minima da x a y (serve assumere che gli archi abbiano lunghezza positiva?).