Algoritmi e Strutture Dati (II anno) - a.a. 1996-97

Ultima modifica: 24 Aprile 1997. Commenti a Eugenio Moggi.

Calcolo della chiusura transitiva

Descriveremo un algoritmo per calcolare la *chiusura transitiva* di una matrice a valori in un *semi-anello chiuso*. L'algoritmo e' una generalizzazione (e lieve variazione) dell'algoritmo di Floyd per calcolare le distanze tra tutte le coppie di nodi. Variando opportunamente il semi-anello si possono risolvere (con lo stesso algoritmo astratto) una varieta' di problemi su grafi e matrici.

Semi-anelli chiusi

Introduciamo le nozioni matematiche preliminari per descrivere il problema e giustificare la correttezza dell'algoritmo.

Un **semi-anello** (A,+,*,0,1) e' una struttura algebrica con due operazioni binarie + e * e due costanti 0 ed 1 che soddisfano i seguenti assiomi

- (x+y)+z = x+(y+z) associativita' del + e 0+x = x = x+0
- x+y = y+x commutativita' del +
- (x*y)*z = x*(y*z) associativita' del * e 1*x = x = x*1
- (x+y)*z = (x*z)+(y*z) , z*(x+y) = (z*x)+(z*y) e 0*z = 0 = z*0 distributivita'

Un **semi-anello chiuso** e' un semi-anello dove si possono effettuare sommatorie arbitrarie Somma_{i in I} a_i, dove I e' un insieme qualsiasi (usando 0 e + si possono calcolare solo sommatorie su insiemi finiti). Inoltre gli assiomi dei semi-anelli che riguardano 0 e + devono essere estesi al caso di sommatorie arbitrarie:

- Somma_{i in I} (Somma_{j in J_i} x_{i,j}) = Somma_{i in I, j in J_i} x_{i,j} dove J_i e' un insieme per ogni i in I
- Somma_{i in I} x_i = Somma_{j in J} x_{f(j)} dove f:J -> I e' una funzione bigettiva
- (x*y)*z = x*(y*z) e 1*x = x = x*1 come per i semi-anelli
- (Somma_{i in I} x_i)*z = Somma_{i in I} (x_i*z) e z*(Somma_{i in I} x_i) = Somma_{i in I} (z*x_i)

In un semi-anello chiuso e' possibile definire due operazioni unarie a^+ e a^* chiamate **chiusura transitiva** e **chiusura riflessiva e transitiva**

- a^+ = Somma_{n in N, n > 0} a^n
- a^* = 1 + a^+ = Somma_{n in N} a^n

dove a^n e' il prodotto di a con se' stesso n volte (e si conviene che a^0=1).

Vi sono innumerevoli esempi di semi-anelli (chiusi), per esempio:

1. (N,+,*,0,1), cioe' i numeri naturali N con le usuali operazioni aritmetiche, questo semi-anello NON E' CHIUSO
2. (N_{ext},+,*,0,1), cioe' i numeri naturali estesi con +infinito con le usuli operazioni opportunamente estese: x+(+infinito) = +infinito , 0*(+infinito) = 0 , n*(+infinito) = +infinito se n > 0
3. (N_{ext},min,+,+infinito,0), cioe' i numeri naturali estesi con +infinito con le operazioni di minimo e somma (verificare la proprieta' distributiva)
4. (N_{ext},max,min,0,+infinito), cioe' i numeri naturali estesi con +infinito con le operazioni di massimo e minimo (verificare la proprieta' distributiva)
5. vi sono le ovvie varianti ottenute sostituendo ad N i reali/razionali non negativi R^+/Q^+
6. (Bool,or,and,false,true), cioe' i valori booleani con certe operazioni logiche
7. (R_{ext},min,+,+infinito,0), cioe' i reali estesi con +infinito e -infinito, dove x+(+infinito) = +infinito anche quando x=-infinito
8. (P(XxX),unione,o,Vuoto,Diagonale), cioe' l'insieme delle relazioni binarie su X con le operazioni di unione e composizione di relazioni x(RoS)z sse esiste y t.c. xRy e ySz.

Per esercizio si provi a definire esplicitamente le operazioni di chiusura.

Vi sono costruzioni che permettono di definire nuovi semi-anelli (chiusi) a partire da semi-anelli (chiusi) piu' semplici, per esempio

- se A e B sono semi-anelli, allora AxB e' il semi-anello con le operazioni definite componente per componente, p.e. (a1,b1)+(a2,b2) = (a1+a2,b1+b2).
- se A e' un semi-anello, allora l'insieme delle matrici VxV (con V insieme finito) a coefficienti in A e' un semi-anello con le operazioni sulle matrici definite nel modo usuale, cioe' (M+N)[u,v]=M[u,v]+N[u,v] e (M*N)[u,v]=Somma_{w in V}(M[u,w]*N[w,v]).

se i semi-anelli di partenza sono chiusi, e' facile vedere che anche i semi-anelli definiti da tali costruzioni sono chiusi.

Operazioni su matrici e cammini

Sia M una matrice VxV a coefficienti in A, che rappresenta un grafo pesato G con pesi in A-{0} (si conviene che M[x,y]=0 indica l'assenza dell'arco dal grafo).

- M[p]. Sia p:x->y un cammino di G, definiamo il suo peso M[p] come il prodotto in A dei pesi che si incontrano lungo il cammino, cioe' M[x_0,...,x_n] = M[x_0,x_1]*...*M[x_{n-1},x_n] (si pone M[x]=1). Si osservi che se la sequenza di nodi non e' un cammino M[p]=0, poiche' M[x_{i-1},x_i]=0 per qualche i.
- M^n[x,y] risulta uguale alla sommatoria in A di M[p] con p che varia sui cammini da x a y in G con esattamente n archi. Poiche' M[p]=0 se p e' una sequenza di nodi che non corrisponde ad un cammino, tali addendi non contribuiscono alla sommatoria.
- M^+[x,y] risulta uguale alla sommatoria in A di M[p] con p che varia sui cammini propri (cioe' con almeno un arco) da x a y.
- Sia M^+_U[x,y] la sommatoria di M[p] con p che varia sui cammini propri da x a y con nodi intermedi in U. Dato v in V-U si dimostra che M^+_{U+v}[x,y] = M^+_U[x,y] + (M^+_U[x,v] * (M^+_U[v,v])^* * M^+_U[v,y]). Quindi formalmente abbiamo la stessa equazione alla base dell'algoritmo di Floyd per il calcolo delle distanze.

Si puo' definire anche M^*_U[x,y], pero' in generale non soddisfa la stessa definizione ricorsiva di M^+, a meno che la sommatoria in A non soddisfi anche la proprieta' di idempotenza (cioe' la

versione infinitaria di x+x=x).

Algoritmo di Floyd per calcolare la chiusura transitiva

Sia A un semi-anello chiuso, su cui non faremo alcune ipotesi tranne il fatto di essere in grado di calcolare x+y, x*y, 0, 1 e x^*. Diamo l'algoritmo (stile Floyd) per calcolare la chiusura transitiva M^+ di una matrice VxV a valori in A e con V finito. Le operazioni x+y, x*y e x^* sono quelle del semi-anello chiuso A.

```
input:  M: array [V,V] of A
output: M^+: array [V,V] of A
var:    M': array [1..|V|] of array [V,V] of A
*inizializzazione
M'[0] <- M
for k <- 1 to |V| do
  for x,y in V do
    M'[k,x,y] <-  M'[k-1,x,y]+(M'[k-1,x,v_k]*(M'[k-1,v_k,v_k]^*)*M'[k-1,v_k,y])
M^+ <- M'[|V|]
```

Tale algoritmo e' interessante perche' instanziando A con opportuni semi-anelli chiusi le matrici M^+ e M^* (= I + M^+) forniscono la soluzione a svariati problemi relativi a grafi pesati. Per esempio:

- M^*{x,y] e' il numero di cammini da x a y, se A = (N_{ext},+,*,0,1) e M[x,y]=1 se (x,y) e' un arco, 0 altrimenti.
- M^*{x,y] e' la distanza da x a y, se A = (N_{ext},min,+,+infinito,0) e M[x,y] e' la lunghezza dell'arco (x,y).
- M^*{x,y] sse esiste un cammino da x a y, se A = (Bool,or,and,false,true) e M e' la matrice di adiacenza.
- M^*[x,y] e' la capacita' del cammino da x a y con capacita' massima, se A = (N_{ext},max,min,0,+infinito) e M[x,y] e' la capacita' dell'arco (x,y).

Come esercizio si provi a trovare un semi-anello chiuso in modo che M^*[x,y] sia la lunghezza del cammino da x a y di lunghezza massima.