1 Strutture applicative e Logica Combinatoria

Nel seguito considereremo espressioni che possono essere indefinite, quindi introduciamo le seguenti convenzioni: $e\downarrow$ significa che l'espressione e e' definita, $e_1 = e_2$ significa che entrambe le espressioni sono definite ed uguali, $e_1 \simeq e_2$ (detta uguaglianza di Kleene) significa che o entrambe le espressioni sono indefinite o sono entrambe definite ed uguali.

Definition 1.1 *Una* **struttura applicativa** *(parziale) e' una coppia $(D,\cdot)$, dove $\cdot$ e' una funziona binaria (parziale) su D. Si dice che $e \in D$* **rappresenta** *la funzione parziale $f\colon D \rightharpoonup D$ sse $\forall d \in D.f(d) \simeq e \cdot d$.*

L'operazione $x \cdot y$ e' detta applicazione, spesso si omette $\cdot$ e si scrive semplicemente $x\ y$. Per evitare un uso eccessivo delle parentesi si conviene di associare l'applicazione a sinistra, quindi $x_1\ x_2 \ldots x_n$ sta per $(\ (x_1\ x_2)\ldots)$.
L'insieme D e' come un universo non tipato i cui elementi possono essere visti sia come dati che come programmi. Tale ambiguita' e' tipica di molti modelli di calcolo: nella architettura von Neumann il contenuto della memoria puo' essere interpretato sia come un dato che come una istruzione, le macchine di Turing possono essere codificate con stringhe e quindi trattate come dati di input per altre macchine di Turing. Sebbene le strutture applicative parziali siano la classe piu' naturale da un punto di vista computazionale, a livello assiomatico considereremo quasi esclusivamente strutture applicative *totali*, poiche' esse sono di piu' immediata formalizzazione nella logica del primo ordine.

Definition 1.2 *Una* **algebra combinatoria**, *o piu' brevemente CA, $(D,\cdot,K,S)$ e' una struttura applicativa in cui $K,S \in D$ soddisfano gli assiomi* (K) $K\ x\ y = x$ (S) $S\ x\ y\ z = x\ z\ (y\ z)$
Una **algebra combinatoria parziale**, *o piu' brevemente pCA, $(D,\cdot,K,S)$ e' una struttura applicativa parziale in cui $K,S \in D$ soddisfano gli assiomi* (K) $K\ x\ y = x$ (S.1) $S\ x\ y\downarrow$ (S.2) $S\ x\ y\ z \simeq x\ z\ (y\ z)$

Example 1.3 Un esempio di pCA e' la struttura applicativa di Kleene $(N,\cdot)$ in cui $m\cdot n \simeq U(m,n) \simeq \phi_m(n)$, dove U e' la funzione universale e $\phi_m\colon N \rightharpoonup N$ e' la funzione ricorsiva parziale rappresentata da m (ovvero la funzione sui naturali calcolata dalla macchina di Turing codificata da m). Per dimostrare che esistono elementi K e S che soddisfano gli assiomi per una pCA si deve sfruttare il teorema s-m-n, che dice che per ogni $m,n \in N$ esiste una funzione ricorsiva totale $s_{m,n}\colon N^{m+1} \to N$ t.c. $\forall e\colon N, \overline{x}\colon N^m, \overline{y}\colon N^n.\phi_e^{m+n}(\overline{x},\overline{y}) \simeq \phi^n_{s_{m,n}(e,\overline{x})}(\overline{y})$, dove $\phi_e^m\colon N^m \rightharpoonup N$ e' la funzione ricorsiva parziale ad m argomenti rappresentata da e.

1.1 Logica Combinatoria

La Logica Combinatoria (CL) e' la teoria equazionale (o se si vuole del primo ordine) delle algebre combinatorie. Il linguaggio di CL e' dato dalla segnatura Σ_{CL} con due simboli di costante, K e S, una simbolo di operazione binaria, $\cdot$ ma spesso lasciato implicito. Tuttavia, e' spesso conveniente estendere il linguaggio con altri simboli di costante. Gli assiomi di CL sono gli assimi equazionali (K) e (S), che nella logica del primo ordine andrebbero scritti piu' propriamente (K) $\forall x,y.K\ x\ y = x$ e (S) $\forall x,y,z.S\ x\ y\ z = x\ z\ (y\ z)$
In CL (eventualmente estesa con altre costanti) possiamo definire una operazione sui termini di CL detta *astrazione*. Tale operazione non fa' parte del linguaggio di CL, bensi' e' definita al meta-livello, come l'operazione di sostituzione $[N/x]M$ o la funzione che restituisce l'invieme delle variabili libere $\mathrm{FV}(M)$ in un termine.

Definition 1.4 *Fissato una variabile x l'***operazione di astrazione** *$\lambda^*x.M$ e' definita per induzione sulla struttura del termine M di CL (anche estesa con costanti)*

- $(\lambda^*x.x) \triangleq I \triangleq SKK$
- $(\lambda^*x.M) \triangleq K\ M$, *se* $x \notin \mathrm{FV}(M)$
- $(\lambda^*x.M_1\ M_2) \triangleq S\ (\lambda^*x.M_1)\ (\lambda^*x.M_2)$, *altrimenti.*

Un'altra operazione di astrazione $\lambda^*_p x.M$, e che al contrario di $\lambda^*x.M$ funziona bene anche per pCA, e'

- $(\lambda^*x.x) \triangleq I \triangleq SKK$
- $(\lambda^*x.M_1\ M_2) \triangleq S\ (\lambda^*x.M_1)\ (\lambda^*x.M_2)$
- $(\lambda^*x.M) \triangleq K\ M$, *altrimenti.*

E' facile dimostrare le seguenti proprieta' dell'astrazione, per induzione sulla struttura dei termini.

Proposition 1.5 *L'operazione di astrazione $\lambda^* x.M$ soddisfa le seguenti proprieta' sintattiche*

- $\mathrm{FV}(\lambda^* x.M) = \mathrm{FV}(M) - \{x\}$, *cioe' la variabile su cui si astrae non e' piu' libera;*
- $(\lambda^* x.M) \equiv (\lambda^* y.[y/x]M)$ *se* $y \notin \mathrm{FV}(M)$, *cioe' la ridenominazione della variabile su cui si astrae e' irrilevante;*
- $[N/y](\lambda^* x.M) \equiv (\lambda^* x.[N/y]M)$ *se* $y \not\equiv x$ *e* $x \notin \mathrm{FV}(N)$, *cioe' astrazione e sostituzione commutato;*
- $CL \vdash (\lambda^* x.M)\ N = [N/x]M$.

Anche l'astrazione $(\lambda^*_p x.M)$ soddisfa simili proprieta', ad eccezione della commutativita' con la sostituzione, addirittura in CL non si riesce nemmeno a derivare $[N/y](\lambda^*_p x.M) = (\lambda^*_p x.[N/y]M)$. La principale differenza tra le due forme di astrazione e' che nella teoria per le pCA si deriva $(\lambda^*_p x.M)\downarrow$, ma in generale non vale $(\lambda^* x.M)\downarrow$.
Usando l'operazione di astrazione e le sue proprieta' e' facile dimostrare che per ogni termine M con $\mathrm{FV}(M) \subseteq \overline{x}$ esiste un termine chiuso N t.c. $CL \vdash N\ \overline{x} = M$, p.e. $N \equiv \lambda^* \overline{x}.M$. Si osservi che fissato M in generale esistono piu' N che soddisfano $N\ \overline{x} = M$, ma che non sono dimostrabilmente equivalenti. Infatti, in molti casi non e' vero che $CL \vdash (\lambda^* x.M) = (\lambda^*_p x.M)$, p.e. quando $M \equiv y\ z$.

1.2 Nozioni di riduzione e proprieta' sintattiche

Una tecnica molto conveniente per studiare le proprieta' di teorie equazionali come CL e' di descrivere la relazione di uguaglianza $M = N$ dimostrabile in termini di una nozione piu' semplice $M \to_R N$, che intuitivamente dice che "M si semplica ad N (in un passo)". Prima introduciamo i concetti generali, ed in un secondo momento considereremo la nozione di riduzione che serve per studiare CL, ovvero la riduzione debole $\to_w$.

Definition 1.6 *Sia T l'insieme dei termini di CL (eventualmente con costanti aggiuntive). Una relazione binaria R su T e' detta* **nozione di riduzione**. *La* **chiusura compatibile** *$\to_R$ di R e' la piu' piccola relazione su T t.c.*

- $M \to_R N$, *se* $M\ R\ N$
- $N\ M \to_R N\ M'$ *e* $M\ N \to_R M'\ N$, *se* $M \to_R M'$ *e* $N \in T$

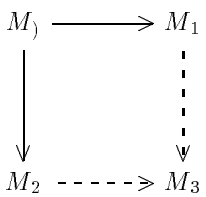
*La R-***riduzione** *$\to^*_R$ e' la chiusura riflessiva e transitiva di $\to_R$, cioe' la piu' piccola relazione su T t.c.*

- $M \to^*_R N$, *se* $M \to_R N$
- $M \to^*_R M$, *se* $M \in T$
- $M \to^*_R P$, *se* $M \to^*_R N$ *e* $N \to^*_R P$

*La R-***equivalenza** *$=_R$ e' la chiusura riflessiva, simmetrica e transitiva di $\to_R$, cioe' la piu' piccola relazione su T t.c.*

- $M =_R N$, *se* $M \to_R N$
- $M =_R M$, *se* $M \in T$
- $N =_R M$, *se* $M =_R N$
- $M =_R P$, *se* $M =_R N$ *e* $N =_R P$

*Un termine $M \in T$ e' detto in R-***forma normale** *(R-nf) sse $M \not\to_R$, cioe' non esiste $N \in T$ t.c. $M \to_R N$. Si dice che N e' una R-nf di M se $M \to^*_R N \not\to_R$.*
La R-riduzione soddisfa la **proprieta' Church-Rosser** *(CR) sse per ogni $M_0, M_1, M_2 \in T$ t.c. $M_0 \to^*_R M_1$ e $M_0 \to^*_R M_2$ esiste $M_3 \in T$ t.c. $M_1 \to^*_R M_3$ e $M_2 \to^*_R M_3$.*

Un modo piu' visivo di descrivere la proprieta' CR e' tramite un diagramma commutativo  dove le

linee tratteggiate indica esistenza di una R-riduzione.

Theorem 1.7 *Se la R-riduzione soddisfa la proprieta' CR allora*

- $M_1 =_R M_2$ *sse esiste* M *t.c.* $M_i \to_R^* M$ *per* $i = 1, 2$
- *se* M_1 *e* M_2 *sono* R*-nf, allora* $M_1 =_R M_2$ *sse* $M_1 \equiv M_2$
- *un termine ha al piu' una* R*-nf.*

Vi sono condizioni sufficienti su R, molto semplici da verificare, che assicurano la proprieta' CR della R-riduzione.

Proposition 1.8 *Se la nozione di riduzione* R *soddisfa la proprieta' sostitutiva, cioe'*

- $[N/x]M_1\ R\ [N/x]M_2$*, se* $M_1\ R\ M_2$ *e* $N \in T$ *e* x *e' una variabile*

allora anche $\to_R$*,* $\to_R^*$ *e* $=_R$ *la soddisfano.*
Se la nozione di riduzione R *non introduce nuove variabili libere, cioe'*

- $\mathrm{FV}(M_1) \subseteq \mathrm{FV}(M_2)$*, se* $M_1\ R\ M_2$

allora anche $\to_R$ *e* $\to_R^*$ *non le introducono.*

La nozione di riduzione di interesse per studiare CL si ottiene orientanto i due assiomi equazionali (K) e (S) e chiudendo per sostituzione, e quindi la proprieta' sostitutiva vale per definizione.

Definition 1.9 *La* **nozione di riduzione debole** w *e' data dalla seguente relazione*

$$\{(K\ M\ N, M) | M, N \in T\} \cup \{(S\ M\ N\ P, M\ P\ (N\ P)) | M, N, P \in T\}$$

Theorem 1.10 *La nozione di riduzione debole soddisfa le seguenti proprieta'*

- $CL \vdash M = N$ *sse* $M =_w N$*;*
- *la* w*-riduzione soddisfa la proprieta' CR;*
- $(\lambda^* x.M)N \to_w^+ [N/x]M$*.*

La prima proprieta' correla la w-uguaglianza alla teoria equazionale di CL, la seconda ci permette di usare la w-riduzione per studiare la teoria equazionale di CL, la terza ci fornisce un rafforzamento della proprieta' $CL \vdash (\lambda^* x.M)N = [N/x]M$ dell'astrazione. E' anche facile dimostrare che $\lambda_p^* x.M)$ e' sempre una w-nf.
E' abbastanza facile dare una descrizione esplicita dei termini di CL che sono in w-nf usando la seguente BNF

$$V \in NF ::= x\ \overline{V} \mid K \mid K\ V_1 \mid S \mid S\ V_1 \mid S\ V_1\ V_2$$

Inoltre vi sono termini di CL che non hanno w-nf, p.e. $\Omega\ \Omega$ dove $\Omega \equiv (\lambda^* x.xx)$. E' immediato vedere che $\Omega\ \Omega \to_w^+ \Omega\ \Omega$, inoltre analizzando in modo esaustivo gli M t.c. $\Omega\ \Omega \to_w^* M$ si vede che $M \to_w^* \Omega\ \Omega$.
La w-riduzione e' molto conveniente per dimostrare che una certa equazione $M = N$ non e' dimostrabile in CL. Diamo alcuni esempi di tali applicazioni

- $[N/y](\lambda_p^* x.M) = (\lambda_p^* x.[N/y]M)$ non e' derivabile, p.e. si prenda $M \equiv x\ y$ e $N \equiv u\ v$.
- $(\lambda^* x.M) = (\lambda^* x.N)$ non e' derivabile da $M = N$, p.e. si prenda $K\ x\ y = x$.
- $(\lambda^* x.M) = (\lambda_p^* x.M)$ non e' derivabile, p.e. si prenda $M = y\ z$.

1.3 Strutture applicative sui termini

Come ogni teoria equazione, anche per CL si possono costruire dei modelli sintattici, i cui carrier sono classi di equivalenza di termini.

Example 1.11 Fissato un insieme X di variabili la struttura applicativa CL_X e' definita come segue

- $D = \{[M] | \mathrm{FV}(M) \subseteq X\}$, dove $[M]$ e' la classe di equivalenza i cui elementi sono termini N t.c. $CL \vdash M = N$ e $\mathrm{FV}(N) \subseteq X$
- $[M] \cdot [N] = [M\ N]$, e non dipende dalla scelta dei rappresentanti.

Se interpretiamo K e S con le classi di equivalenza $[K]$ e $[S]$, allora CL_X diventa una CA, inoltre CL_0 altro non e' che il modello iniziale di CL. Sfruttando le proprieta' della w-riduzione e' immediato vedere che CL_X non e' banale, cioe' D ha almeno due elementi, anzi infiniti elementi. Infatti, se V_1 e V_2 sono w-nf allora $[V_1] = [V_2]$ sse $V_1 \equiv V_2$.

Un'altra modo di costruire strutture applicative e' mediante una *semantica operazione* per i termini chiusi di CL. In tale contesto una semantica operazionale la si puo' identificare con una strategia di riduzione, cioe' una relazione *deterministica* (=grafo di una funzione parziale) $\rightarrow \subset \rightarrow_w$.

Example 1.12 Introduciamo due semantiche operazioni sui termini chiusi di CL

- la semantica operazionale call-by-name (CBN) $\rightarrow_N$ e' la piu' piccolare relazione t.c.
  $K\ M_1\ M_2\ \overline{M} \rightarrow_N M_1\ \overline{M}$, e $S\ M_1\ M_2\ M_3\ \overline{M} \rightarrow_N M_1\ M_3\ (M_2\ M_3)\ \overline{M}$
  dove gli M variano sui termini chiusi.
- la semantica operazionale call-by-value (CBV) $\rightarrow_V$ e' la piu' piccolare relazione t.c.
  $K\ V_1\ V_2\ \overline{V} \rightarrow_V V_1\ \overline{V}$, $S\ V_1\ V_2\ V_3\ \overline{V} \rightarrow_V V_1\ V_3\ (V_2\ V_3)\ \overline{V}$, e $C\ \overline{V}\ M\ \overline{M} \rightarrow_V C\ \overline{V}\ M'\ \overline{M}$ se $M \rightarrow_V M'$,
  dove gli M variano sui termini chiusi, i V sulle w-nf chiuse, e C sulle costanti.

Se $\rightarrow_o$ e' una delle due semantiche operazioni CBN o CBV, allora possiamo definire una struttura applicativa parziale che indicheremo con CL_o definita come segue

- $D = \{M | M \not\rightarrow_o\}$, cioe' M e' un termine chiuso dove la strategia di riduzione $\rightarrow_o$ non e' applicabile
- $M \cdot N = P$ sse $M\ N \rightarrow_o^* P \not\rightarrow_o$, poiche' $\rightarrow_o$ e' deterministica se P esiste e' unico.

E' facile vedere che CL_N e CL_V (con l'interpretazione ovvia di K e S) sono pCA.

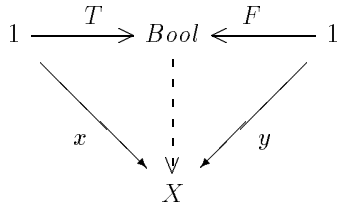
1.4 Potere espressivo di CL

1.4.1 rappresentazioni di tipi di dato

L'operazione di astrazione ci permette di considerare varie *estensioni definizionali* di CL del tipo nuova costante c e nuovo assioma equazionale $c\ \overline{x} = M$ dove M e' un termine di CL t.c. $\mathrm{FV}(M) \subseteq \overline{x}$. Infatti, possiamo interpretare c con il termine $(\lambda^* \overline{x}.M)$ di CL. Sfruttando questo tipo di estensioni definizionali, e' possibile codificare in modo molto naturale vari tipi di dato caratterizzati da *proprieta' universali*.

- Il tipo di dato $Bool$ dei booleani e' specificato da due costanti $T, F : Bool$ ed un operatore *polimorfo* $If_X : Bool, X, X \rightarrow X$ t.c. $If(T, x, y) = x$ e $If(F, x, y) = y$.

  In effetti, la proprieta' universale di $Bool$ dice che per ogni insieme X ed ogni coppia di elementi $x, y : X$ esiste ed e' unica $h : Bool \rightarrow X$ t.c. $h\ T = x$ e $h\ F = y$. In modo diagrammatico la properieta' universale la si puo' esprimere mediante il seguente diagramma commutativo



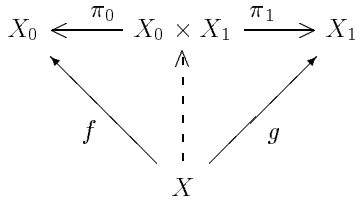
  dove la linea tratteggiata indica esistenza ed unicita' di una funzione.

  L'operatore If permette di dimostrare l'esistenza di h, poiche' $h\ b = If\ b\ x\ y$ soddisfa le proprieta' richieste. Si osservi che per esprimere l'unicita' di h e' necessario aggiungere altri assiomi a quelli di If.

  In CL possiamo *rappresentare* T, F e If nel modo seguente $T\ x\ y = x$, $F\ x\ y = y$, $If\ b\ x\ y = b\ x\ y$. E' immediato verificare che le equazioni $If\ T\ x\ y = x$ e $If\ F\ x\ y = y$ sono derivabile in CL a partire dalle equazioni che definiscono T, F e If.

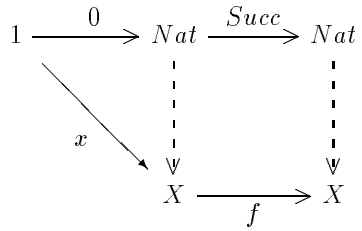
- Il tipo di dato $X_0 \times X_1$ delle coppie specificato dall' operatore del *primo ordine* $Pair : X_0, X_1 \rightarrow X_0 \times X_1$ ed dall'operato polimorfo di *ordine superiore* $Split_X : (X_0, X_1 \rightarrow X), X_0 \times X_1 \rightarrow X$ t.c. $Split(f, Pair(x, y)) =$

$f(x,y)$. La proprieta' universale per il tipo di dato $X_0 \times X_1$ e' data da



La rappresentazione di tali operatori in CL e' definita nel modo seguente $Pair\ x\ y\ z = z\ x\ y$ e $Split\ f\ p = p\ f$. Anche in questo caso la derivabilita' dell'equazione $Split\ f\ (Pair\ x\ y) = f\ x\ y$ e' immediata.

- Il tipo di nato Nat dei numeri naturali e' specificato da $0{:}\,Nat$, $Succ{:}\,Nat \to Nat$ e $It_X{:}\,(X \to X), X, Nat \to X$ t.c. $It(f,x,0) = x$ e $It(f,x,Succ\ n) = f(It(f,x,n))$. Se identifichiamo il naturale n con $Succ^n(0)$, allora abbiamo che $It(f,x,n) = f^n(x)$. La proprieta' universale per il tipo di dato Nat e' data da



La codifica dei numeri naturali in CL proposta da Church e' $\underline{n}\ f\ x = f^n x$ dove $f^0 x \equiv x$ e $f^{n+1}x \equiv f(f^n x)$. Questo suggerisce la seguente rappresentazione degli operatori: $0\ f\ x = x$, $Succ\ n\ f\ x = f\ (n\ f\ x)$, $It\ f\ x\ n = n\ f\ x$. Anche in questo caso e' immediato derivare le equazioni desiderate.

Come tutte le rappresentazioni, anche queste presentano un certo grado di arbitrarieta'. Usando la codifica delle coppie e' possibile ricavare da It_X un operatore $R_X{:}\,(X, Nat \to X), X, Nat \to X$ di ricorsione primitiva t.c. $R(f,x,0) = x$ e $R(f,x,succ\ n) = f(R(f,x,n),n)$. R risulta essere piu' conveniente di It per definire funzioni sui numeri naturali.

1.4.2 Definizioni ricorsive e operatori di punto fisso

Le definizioni ricorsive sono un meccanismo molto potente adottato nei linguaggi di programmazione. Mentre una definizione nel senso matematico del termine e' della forma $c = M$, dove in M si usano solo concentti precedentemente definiti (e quindi non si puo' usare la costante c che si sta definendo), una definizione ricorsiva permette di *definire* c anche in termini di se stessa.

Sfruttando l'operazione di astrazione possiamo riscrivere una definizione ricorsiva nella forma $c = f\ c$, in modo che c non venga usata in f. In questo caso si dice che c e' un **punto fisso** di f. Facciamo vedere che in CL esiste un **operatore di punto fisso** Y t.c. $Y\ f = f(Y\ f)$, ovvero Y restituisce un punto fisso per f.

Consideriamo due combinatori di punto fisso definibili in CL:

- il combinatore $Y_{curry} \equiv (\lambda^* f.V\ V)$ dove $V \equiv \lambda^* y.f(y\ y)$, soddisfa la proprieta' $Y\ f = f(Y\ f)$ ma non la proprieta' piu' forte $Y\ f \to_w^* f(Y\ f)$
- il combinatore $Y_{turing} \equiv Z\ Z$ dove $Z \equiv \lambda^* f, y.f(y\ y\ f)$, soddisfa la proprieta' $Y\ f \to_w^+ f(Y\ f)$.

In entrambi i casi e' assai facile generalizzare i combinatori di punto fisso per trattare definizioni mutuamente ricorsive, che possono essere sempre messi nella forma $(c_i = f_i\ \overline{c} | i \in n)$. In tal caso avremo bisogno di una famiglia di n combinatori $Y_{n,i}$ con $i \in n$ t.c. $Y_{n,i}\ \overline{f} = f_i(Y_{n,j}\ \overline{f})_{j \in n}$ per ogni $i \in n$. Una possibile definizione di tali combinatori, che generalizza la definizione di Y_{curry}, e' data da $Y_i \equiv (\lambda^* \overline{f}.V_i\ \overline{V})$ dove $V_i \equiv (\lambda^* \overline{y}.f_i(y_j\ \overline{y})_{j \in n})$.

Avendo a disposizione un combinatore di punto fisso e' abbastanza plausibile aspettarsi che tutte le *funzioni calcolabili* sui numeri naturali codificati con i numerali di Church siano *definibili* in CL.

Definition 1.13 *Data una funzione parziale* $f{:}\,N^m \rightharpoonup N$ *ed un termine chiuso* M *di* CL*, si dice che* M **rappresenta/definisce** f *sse per ogni* $\overline{n} \in N^m$

- $f(\overline{n})$ *e' definita ed uguale ad* k *e* $CL \vdash M\ \overline{\underline{n}} = \underline{k}$
- *oppure* $f(\overline{n})$ *e' indefinita e il termine* $M\ \overline{\underline{n}}$ *non ha w-nf.*

Si osservi che i numerali di Church sono in w-nf, e quindi $CL \vdash \underline{m} = \underline{n}$ sse $m = n$.

Theorem 1.14 *Data una funzione* $f{:}\,N^m \rightharpoonup N$ *si ha che* f *e' Turing calcolabile sse e' definibile in* CL.

1.5 Estensioni di CL

Consideriamo alcuni assiomi (al primo ordine) per CL e piu' in generale per strutture applicative.

1.5.1 Estensioni inconsistenti

E' facile vedere che $CL + (K = S)$ e' **equazionalmente inconsistente**, ovvero $CL + (K = S) \vdash x = y$. Un risultato leggermente piu' forte (in cui non si richiede che l'applicazione sia una operazione totale) e': se in una pCA D si ha che $K = S$, allora D ha un solo elemento. L'inconsistenza equazionale segue in modo ovvio da $CL + (K = S) \vdash I = x$, quindi vediamo la dimostrazione $I = x$.

- $CL \vdash I\ I\ x = x$ segue facilmente da $I\ M = M$;
- $CL + (K = S) \vdash I\ I\ x = I$ invece usa l'assioma $K = S$ e la definizione di $I \equiv S\ K\ K$
  $I\ I\ x =$ per definizione di I
  $(S\ K\ K)\ I\ x =$ per $K = S$
  $(K\ K\ K)\ I\ x =$ per gli assiomi di CL
  $K\ I\ x = I$.

Vi e' un risultato generale dovuto a Böhm che ci dice quando e' equazionalmente inconsistente aggiungere un assioma $M = N$ con M ed N w-nf. In particolare, si ha che $CL + (\underline{m} = \underline{n})$ e' equazionalemnte inconsistente quando $m \neq n$.
Un'altra estensione inconsistente di CL e' l'aggiunta di un costante if_{eq} per effettuare il test di uguaglianza. Gli assiomi (nella logica del primo ordine) per if_{eq} sono
(ifeq.true) $\forall x, y, u, v. x = y \supset if_{eq}\ x\ y\ u\ v = u$ (ifeq.false) $\forall x, y, u, v. x \neq y \supset if_{eq}\ x\ y\ u\ v = v$
Per dimostrare l'inconsistenza equazionale e' piu' semplice ragionare in termini di modelli, quindi supponiamo che D sia una CA con almeno due elementi $a \neq b$ e che sia anche un modello per if_{eq}, facciamo vedere che abbiamo un assurdo:

- usando l'operazione di astrazione (che vale in CL anche in presenza di costanti addizionali) possiamo trovare un $f \in D$ t.c. $f\ x = if_{eq}\ x\ a\ b\ a$;
- usando un combinaotre di punto fisso possiamo provare un punto fisso $p \in D$ t.c. $f\ p = p$;
- facciamo vedere che si ha un assurdo, considerando i due casi possibili $p = a$ e $p \neq a$.
  Se $p = a$ allora $a = p = f\ p = if_{eq}\ a\ a\ b\ a = b$, che contraddice $a \neq b$.
  Se $p \neq a$ allora $p = f\ p = if_{eq}\ a\ p\ b\ a = a$, che contraddice $p \neq a$.

E' tuttavia facile dimostrare che e' possibile avere pCA non banali con un elemento che soddisfa gli assiomi per if_{eq}. Per esempio, la struttura applicativa di Kleene $(N, \cdot)$. Infatti la funzione $f(x, y, u, v) =$ if $x = y$ then u else v e' ovviamente ricorsiva, e $m \in N$ che la rappresenta soddisfa gli assiomi per if_{eq}.

1.5.2 Estensionalita'

Un assioma molto naturale per le strutture applicative (sia totali che parziali) e' l'assioma di estensionalita'
(ext) $\forall x, y.(\forall z. x\ z = y\ z) \supset x = y$ o (p.ext) $\forall x, y.(\forall z. x\ z \simeq y\ z) \supset x = y$ nel caso parziale.
Il significato intuitivo dell'estensionalita' in una struttura applicativa $D, \cdot)$ e' "se due programmi x e y rappresentano la stessa funzione $f : D \rightharpoonup D$ allora sono uguali". Quindi in presenza di estensionalita' si ha una corrispondenza biunivoca tra funzioni rappresentabili ed elementi di D. Inoltre le varie operazioni di astrazione definite in CL diventano dimostrabilmente equivalenti, cioe' $CL + (ext) \vdash \lambda^* x.M = \lambda^*_p x.M$, e si comportano in modo estensionale, cioe' $CL + (ext) \vdash (\forall x.M = N) \supset \lambda^* x.M = \lambda^* x.N$.
Una proprieta' leggermente piu' debole della estensionalita' (e che e' usata per dare una assiomatizzazione al primo ordine dei modelli del λ-calcolo non tipato) e' l'esistenza di un combinatore ϵ di scelta di un *rappresentante canonico*:
(ϵ) $\forall x, y. x\ y = \epsilon\ x\ y$ (ϵ.ext) $\forall x, y.(\forall z. x\ z = y\ z) \supset \epsilon\ x = \epsilon\ y$
Il primo assioma dice che x ed il **rappresentante canonico** $\epsilon\ x$ rappresentano la stessa funzione, mentre il secondo assioma dice se due programmi x ed y rappresentano la stessa funzione allora i rappresentanti canonici $\epsilon\ x$ e $\epsilon\ y$ sono uguali. Se una CA soddisfa (ext), allora un combinatore di scelta ϵ esiste ed e' necessariamente I. Data una struttura applicativa $(D, \cdot)$ e' sempre possibile definire una funzione di scelta $f : D \to D$ di un rappresentante canonico, ma in generale tale f non e' rappresentabile. Gli assiomi per ϵ ci assicurano l'esistenza di una funzione di scelta che e' anche rappresentabile.