Compitino su Specifiche e Riscrittura

Esercizio 1. Si consideri la segnatura con una sola sort S e operazioni $a, empty: S$ e $iter: S \to S$. Dire se il seguente sistema di riscrittura e' localmente confluente, indicando esplicitamente quali sono le coppie critiche

1. $iter(empty) \to empty$
2. $iter(iter(x)) \to iter(x)$

Soluzione. Le coppie critiche

2.1 $iter(iter(empty)) \to^1 iter(empty)$ e $iter(iter(empty)) \to^2 iter(empty)$

2.2 $iter(iter(iter(x))) \to^2 iter(iter(x))$ e $iter(iter(iter(x))) \to^2 iter(iter(x))$

e chiaramente sono confluenti.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema di riscrittura (si supponga di avere una sola sort T) sulla segnatura $nil: T$, $leaf: T \to T$, $node: T, T \to T$ e $flat: T \to T$

- $flat(nil) \to nil \qquad flat(leaf(x)) \to leaf(x) \qquad flat(node(nil, y)) \to flat(y)$
  $flat(node(leaf(x), y)) \to node(leaf(x), flat(y)) \qquad flat(node(node(y_1, y_2), y)) \to flat(node(y_1, node(y_2, y)))$

dire se il sistema e' terminante e/o confluente. Descrivere i termini ground in forma normale. [NOTA: informalmente l'operazione $flat$ trasforma un albero in una lista di foglie.]

Soluzione. Il sistema e' ortogonale, e quindi confluente. E' anche terminante, si utilizzi la funzione $f: T_\Sigma \to N^+$ t.c.

$$f(nil) = f(x) = 1 \qquad f(leaf(t)) = f(t) + 1 \qquad f(node(t_1, t_2)) = 2 * f(t_1) + f(t_2) \qquad f(flat(t)) = 2 * f(t)$$

i termini ground in forma normale sono $nf ::= nil \mid leaf(nf) \mid node(nf_1, nf_2)$.

Esercizio 3. Sia Σ la seguente segnatura

- sort N, L
- operazioni $zero: N$, $succ: N \to N$, $nil: L$, $cons: N, L \to L$
- predicati $leq: N, N$, $in: N, L$, $cat: L, L, L$, $permute: L, L$

Si consideri la Σ-algebra A t.c.

- N^A = l'insieme dei numeri naturali, L^A = le sequenze finite di naturali
- l'interpretazione delle operazioni e' quella standard
- $leq^A(n_1, n_2) \stackrel{\Delta}{\iff} n_1 \leq n_2$
  $in^A(n, l) \stackrel{\Delta}{\iff} n$ occorre nella sequenza l
  $cat^A(l_1, l_2, l) \stackrel{\Delta}{\iff} l$ e' la concatenazione di l_1 seguita da l_2
  $permute^A(l_1, l_2) \stackrel{\Delta}{\iff} l_1$ e' una permutazione di l_2

Dare una specifica condizionale SP sulla segnatura Σ t.c. A sia un modello iniziale di SP [SUGGERIMENTO: inizialmente si trascuri il predicato *permute*. Dovrebbero bastare 8 assiomi condizionali].
Non si cerchi di dimostrare che A sia un modello iniziale di SP, l'esercizio vuole solo verificare la capacita' di tradurre in specifiche design una descrizione precisa ma *informale*.

Soluzione.

- assiomi per leq: $\quad leq(zero, x) \qquad leq(x, x') \Longrightarrow leq(succ(x), succ(x'))$
- assiomi per in: $\quad in(x, cons(x, y)) \qquad in(x, y) \Longrightarrow in(x, cons(x', y))$
- assiomi per cat: $\quad cat(nil, y, y) \qquad cat(y_1, y_2, y) \Longrightarrow cat(cons(x, y_1), y_2, cons(x, y))$
- assiomi per $permute$:
  $permute(nil, nil) \qquad cat(y_1, cons(x, y_2), y') \wedge cat(y_1, y_2, y'') \wedge permute(y, y'') \Longrightarrow permute(cons(x, y), y')$